

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

a) Dado un elemento a_{ij} dunha matriz cadrada $n \times n$, ao suprimir a súa fila e a súa columna, obtense unha submatriz $(n-1) \times (n-1)$ e o seu determinante é un menor de orde $n-1$, que se chama menor complementario do elemento a_{ij} e represéntase por α_{ij} .

Chámase adxunto de a_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$, é dicir, é o menor complementario co seu signo ou co signo contrario, segundo $i+j$ sexa par ou impar.

b)

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 1 - 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) + (1-\lambda) = \\ &= (1-\lambda)[1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1] = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se $\lambda = 1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Se $\lambda = 2$:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\text{Para } \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq 2, \text{rang}(A - \lambda I) = 3}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 0, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 1, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda = 2, \text{rang}(A - \lambda I) = 2}$$

$$\text{ii)} \quad XA - 2A = 3X \Leftrightarrow X(A - 3I) = 2A \Leftrightarrow X = 2A(A - 3I)^{-1}$$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6;$$

Polo apartado i., sabemos que existe $(A - 3I)^{-1}$

$$(A - 3I)^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 9 \\ 9 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) vector dirección de r : $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (5, 10, 5) \parallel (1, 2, 1)$

Elementos que determinan o plano: $\begin{cases} A(0, 1, 2) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (5, 2, -1) \end{cases}$

Se chamamos π ao plano buscado,

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x + 6(y-1) - 8(z-2) = 0$$

$$\boxed{\pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0}$$

b) Sexa α o plano perpendicular a r e que pasa polo punto $B(5, 3, 1)$. Entón

vector normal a α : $\vec{n}_\alpha = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$

$$\alpha: (x-5) + 2(y-3) + (z-1) = 0 \Rightarrow \alpha: x + 2y + z - 12 = 0$$

Para calcular o punto de corte de α e r , escribimos as ecuacións paramétricas da recta (coñecemos $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$ e evidentemente $(0, 0, 0) \in r$):

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para obter o punto de corte da recta e o plano, substituímos as coordenadas do punto xenérico da recta na ecuación do plano:

$$\lambda + 4\lambda + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Polo tanto a recta corta ao plano no punto correspondente ao valor do parámetro $\lambda = 2$:

$$\boxed{P(2, 4, 2)}$$

c) Se chamamos β ao plano buscado,

$$\left. \begin{matrix} \beta \parallel \pi \\ \pi: 2x - 3y + 4z - 5 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta: 2x - 3y + 4z + D = 0$$

Ademais,

$$\left. \begin{matrix} \beta \parallel r \\ (0, 0, 0) \in r \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(r, \beta) = d((0, 0, 0), \beta) = \frac{|D|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{|D|}{\sqrt{29}}$$

Polo tanto:

$$\frac{|D|}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \Rightarrow D = \pm 29$$

$$\boxed{\begin{matrix} \beta: 2x - 3y + 4z + 29 = 0 \\ \text{ou} \\ \beta: 2x - 3y + 4z - 29 = 0 \end{matrix}}$$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) Para que $f(x)$ sexa derivable en $x = 1$, ten que ser continua en $x = 1$.

Se $f(x)$ é continua en $x = 1$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\ln x + 2}{x^2} = 2 \\ f(1) = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 2$$

Se $a + b = 2$, $f(x)$ será derivable en $x = 1$ se $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{se } x < 1 \\ \frac{2x - 2x(2\ln x + 2)}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = -2 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = -2$$

Polo tanto, $f(x)$ será derivable en $x = 1$, se:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = -4 \\ b = 6 \end{array}}$$




b) Para $a = -4$ e $b = 6$

$$f'(x) = \begin{cases} -8x + 6 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x - 2x(2\ln x + 2)}{x^4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$-8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3/4$$

$$2x - 2x(2\ln x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - 2\ln x - 2) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 < 1 \\ \rightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1/2} < 1 \end{cases}$$

Polo tanto, o único valor que anula a primeira derivada é $x = 3/4$.

| | $(-\infty, 3/4)$ | $(3/4, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---------|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | - | - |
| $f(x)$ |  |  |  |

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crecente en } (-\infty, 3/4) \\ \text{Decrecente en } (3/4, \infty) \end{array}}$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

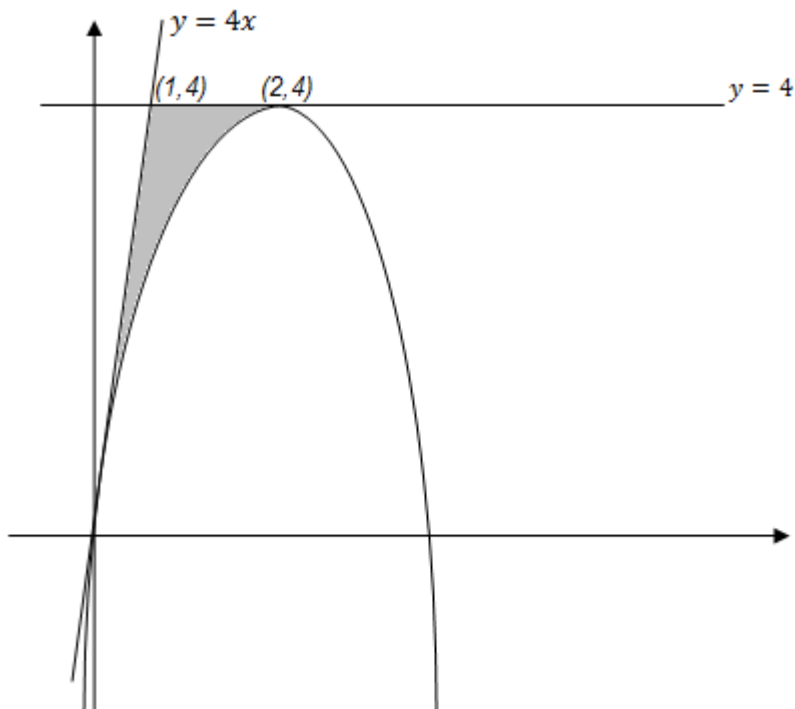
$$f(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$$

Puntos de corte cos eixes: $(0,0)$, $(4,0)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ f''(x) = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Cóncava. Vértice: } (2,4)$$

Recta tanxente en $(0,0)$: $y = 4x$

Recta tanxente en $(2,4)$: $y = 4$



$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [4x - (4x - x^2)] dx + \int_1^2 [4 - (4x - x^2)] dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} + 8 - 8 + \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{2}{3} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a)

Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 3 - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

Cálculo do rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4m \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \text{ se } m = 0; \text{ rang}(A) = 3, \text{ se } m \neq 0$$

Discusión:

$m = 0$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 0$, $\text{rang}(C) = 2 \neq 3 = \text{rang}(A)$. Sistema incompatible.

b) Para $\boxed{m=0}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y = -z \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$

As infinitas solucións son:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}\lambda \\ y &= -\frac{1}{2}\lambda; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Determinamos un vector director e un punto de cada unha das rectas:

$$P_r(0,1,1); \quad \vec{v}_r = (0,3,3)$$

$$P_s(-4,2,0); \quad \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)$$

Coordenadas proporcionais. Polo tanto, as rectas son paralelas ou coincidentes

$$P_r(0,1,1) \in r, \quad P_r(0,1,1) \notin s$$

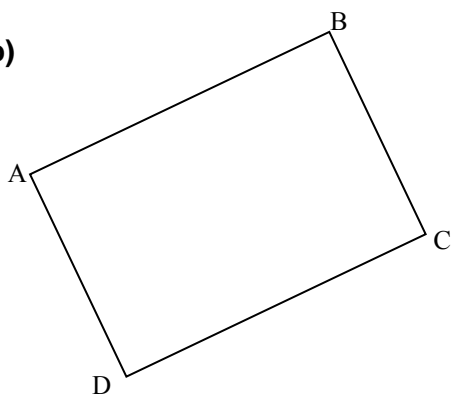
As rectas son paralelas non coincidentes

Como as rectas son paralelas, a distancia entre elas pode calcularse como a distancia dun punto dunha delas á outra:

$$d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{4+16+16}}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$\left\{ \overrightarrow{P_r P_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,4,-4) \right\}$$

b)



Evidentemente $A, B \in r$. Polo tanto, $C, D \in s$. Tendo en conta que $P_s(-4,2,0)$ e $\vec{v}_s = (0,1,1)$, un punto xenérico de s será da forma $(-4, 2 + \lambda, \lambda)$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow (0,3,3) \cdot (-4, \lambda - 2, \lambda - 4) = 0 \Rightarrow 3\lambda - 6 + 3\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{C(-4,5,3)}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow (0,3,3) \cdot (-4, \lambda + 1, \lambda - 1) = 0 \Rightarrow 3\lambda + 3 + 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{D(-4,2,0)}$$

A área do rectángulo podemos calculala como:

$$A = d(r,s) \cdot d(A,B) = d(r,s) \cdot |\overrightarrow{AB}| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 18$$

Ou ben

$$A = d(A,B) \cdot d(A,D) = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (2-1)^2 + (-1)^2} = 18$$

Polo tanto:

$$\boxed{A = 18 \text{ u}^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

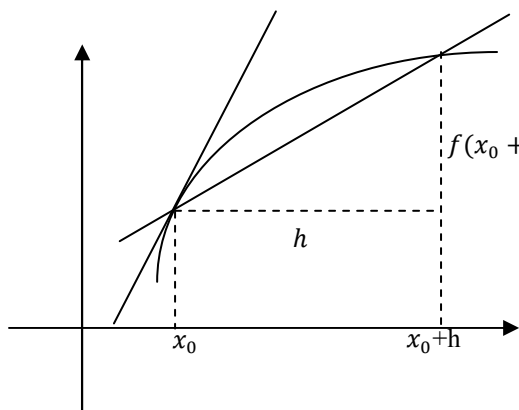
OPCIÓN B

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: O cociente

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

coincide coa pendente da recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. A medida que vai diminuindo a amplitude do intervalo $[x_0, x_0 + h]$, os puntos de corte determinados polas distintas secantes fanse máis e máis próximos. No límite, a secante convértese na tanxente.

Así, a derivada de $f(x)$, en $x = x_0$, coincide coa pendente da recta tanxente á gráfica de $f(x)$ no punto $(x_0, f(x_0))$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{Pendente da recta tanxente á gráfica de } f(x), \text{ en } x = x_0.$$

b) $f'(x) = -2e^{-x}(x+1) + 2e^{-x} = -2xe^{-x}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}(x-1)$$

$$f''(0) = -2 < 0$$

} \Rightarrow Máximo relativo: (0,2)

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---------|----------------|---------------|
| $f'(x)$ | + | - |
| $f(x)$ | | |

Crecente en $(-\infty, 0)$
 Decrecente en $(0, \infty)$

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a)

Indeterminación $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2 - \frac{x}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}} - \frac{1}{4}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{4(4+x)\sqrt{4+x}}}{2} = \boxed{-\frac{1}{64}}$$

b) Buscamos unha función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e ademais $F(\pi) = 0$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

↑
└──────────┬──────────┘
 { Por partes: $\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix} \}$

$$0 = F(\pi) = \pi + C \Rightarrow C = -\pi$$

Polo tanto

$$\boxed{f(x) = -x \cos x + \operatorname{sen} x - \pi}$$